

ESFORÇOS SOLICITANTES EM VIGAS

André Luis Christoforo

Cássio Fernando Simioni

1.0 - Introdução

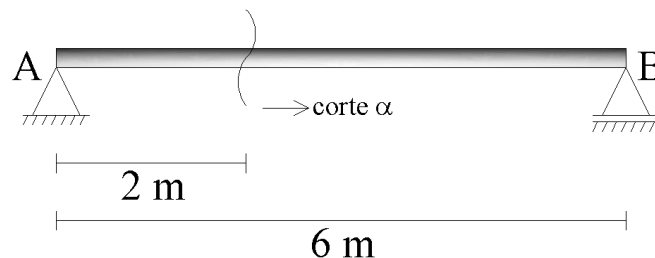
Até o momento o curso de mecânica esteve voltado para o equilíbrio externo dos corpos, considerando os mesmos como sendo rígidos, sem a possibilidade de deformação. Nesse sistema, esforços externos são distribuídos ao longo da barra (corpo rígido) até chegarem aos vínculos das estruturas. O principal trabalho, inicialmente, foi o de calcular tais reações vinculares para que o corpo pudesse ser mantido em equilíbrio.

Pode-se notar que nos cálculos das reações vinculares não é analisado o modo como o corpo transmite, para os apoios, as cargas pelas quais está sendo solicitado. A partir de agora, no entanto, serão analisados quais os efeitos que a transmissão desse sistema de cargas externas para os apoios provoca nas diversas seções que constituem o corpo em equilíbrio.

O Cálculo dos Esforços Solicitantes (Solicitações Internas) é o cerne do curso de Mecânica dos Sólidos, pois através de um bom entendimento do conceito de esforços solicitantes é que se pode garantir subsídios para o estudo da Resistência dos Materiais.

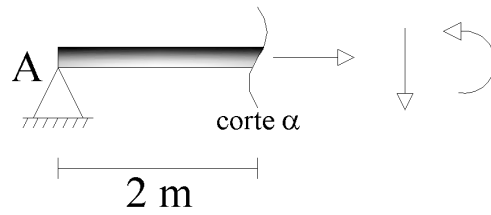
1.1 - Definição

Inicialmente, imagina-se que uma barra rígida \overline{AB} qualquer está sendo seccionada. Neste exemplo a barra possui $6m$ e a secção ocorre a $2m$ de A , entretanto, a secção poderia ser feita em QUALQUER ponto da barra. O corte será chamado de α .



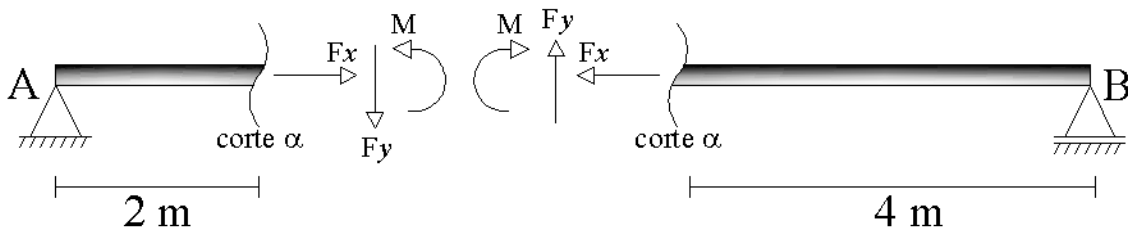
As intensidades das reações nos apoios já são conhecidas e indicam que o corpo está em equilíbrio. Porém, ao se efetuar um corte qualquer, para que as partes isoladas

pelo corte permaneçam em equilíbrio, devem aparecer alguns esforços internos, que são desconhecidos.



Pode-se dizer, portanto, que no centro de gravidade desta seção devem aparecer esforços internos resultantes de força e de momento, que mantém o corpo isolado em equilíbrio. Analogamente ao cálculo das reações nos vínculos, onde são somadas forças em x e y , e também são calculados momentos, os esforços internos devem ocorrer em x e y , e gerar um momento.

As resultantes nas seções de corte de ambos os lados devem ser tais que reproduzam a situação original quando as duas partes forem ligadas novamente, ou seja, pelo princípio da ação e reação, devem ser de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.



1.1.1 – Definição de Esforço Normal “N”

Esforço Normal é a força atuante no sentido da peça, a qual pode ser calculada a partir da tensão normal na seção. O efeito do Esforço Normal será de provocar alongamentos ou encurtamentos na peça, mantendo suas seções transversais planas e paralelas. É indicado pela letra “N”.

O exemplo abaixo ilustra a grosso modo como o Esforço Normal atua em uma barra qualquer. As linhas pontilhadas representam as dimensões da barra antes do esforço:

(N = esforço normal; Δx e Δy = deformações da barra devido à ação do esforço normal)



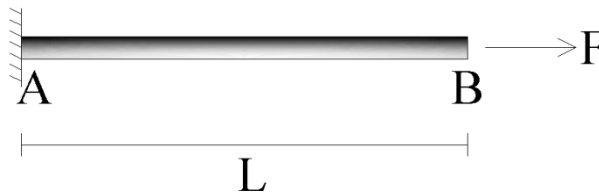
A barra sofre compressão e “encurta”.

ou



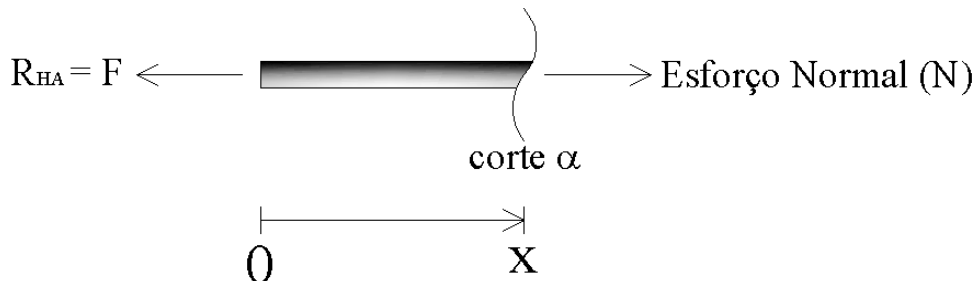
A barra sofre tração e “alonga”.

Em posse da idéia de Esforço Normal, pode-se agora, analisar a ação do mesmo em um exemplo de aplicação. Imagina-se, então, uma viga de comprimento L engastada e sendo solicitada por uma força de intensidade F :



Reação no vínculo: $\sum F_x = 0 \Rightarrow F - R_{HA} = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = F}$

Fazendo um corte α qualquer na barra a x unidades de comprimento, tem-se:



Somando forças em x , obtém-se o valor do esforço interno, neste caso, o Esforço Normal:

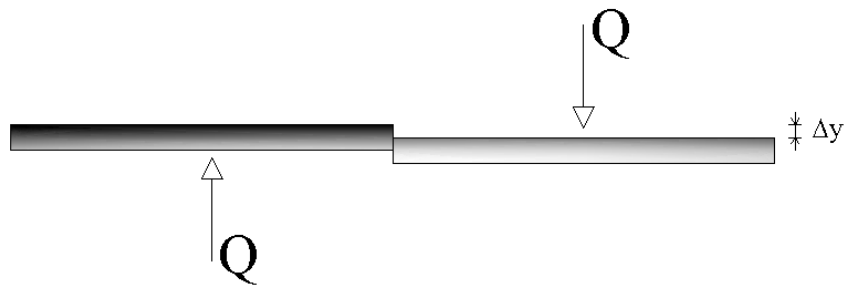
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - F = 0 \Rightarrow \underline{N = F}$$

1.1.2 – Definição de Esforço Cortante “Q”

Esforço Cortante é a força perpendicular à peça, calculada a partir da tensão cisalhante na mesma. O efeito do Esforço Cortante é o de provocar o deslizamento linear, no sentido do esforço, de uma seção sobre a outra infinitamente próxima, acarretando o corte ou cisalhamento da mesma. É indicado pela letra “Q”.

O exemplo abaixo ilustra a grosso modo como o Esforço Cortante atua em uma barra qualquer.

(Q = esforço cortante; Δx e Δy = deformações da barra devido à ação do esforço cortante)



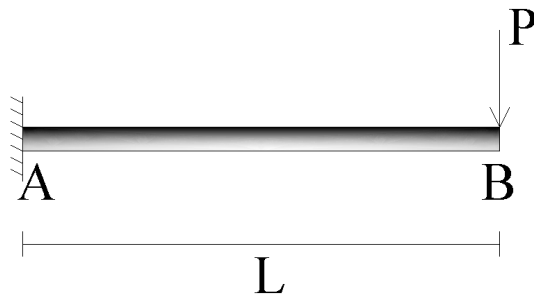
Cisalhamento da direção de y.

ou



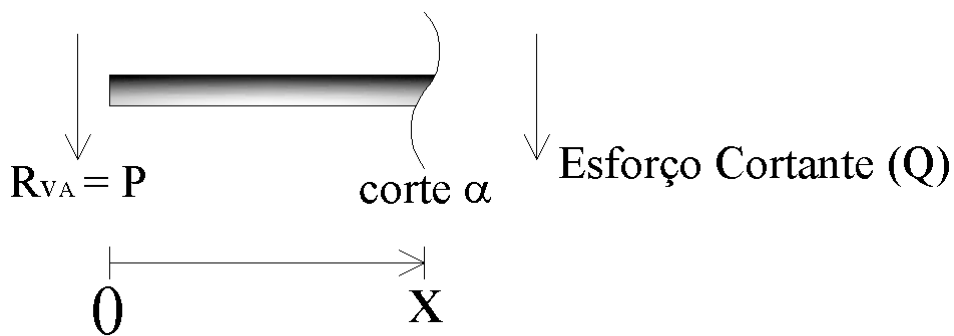
Cisalhamento da direção de x.

Em posse da idéia de Esforço Cortante, pode-se agora, analisar a ação do mesmo em um exemplo de aplicação. Imagina-se, então, uma viga de comprimento L engastada e sendo solicitada por uma força de intensidade P :



Reação no vínculo: $\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} - P = 0 \Rightarrow \underline{R_{VA} = P}$

Fazendo um corte α qualquer na barra a x unidades de comprimento, tem-se:



Somando forças em y , obtém-se o valor do esforço interno, neste caso, o Esforço Cortante:

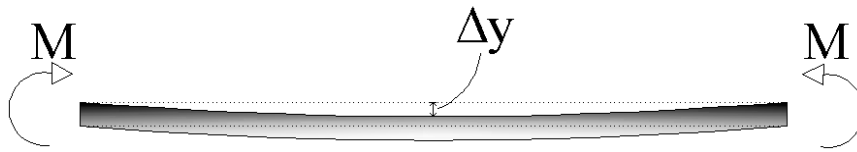
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -Q + P = 0 \Rightarrow \underline{Q = P}$$

1.1.3 – Definição de Momento Fletor “M”

O Momento Fletor é definido como a soma vetorial dos momentos provocados pelas forças externas de um dos lados da seção tomada como referência, em relação a um eixo nela contido, no caso, o eixo z . O Momento Fletor tende a flexionar a peça, como resultado de tensões normais de sinais contrários na mesma seção, ou seja, tende a fazer a seção girar sobre um eixo localizado no seu próprio plano, comprimindo uma parte e distendendo a outra. É indicado pela letra “M”.

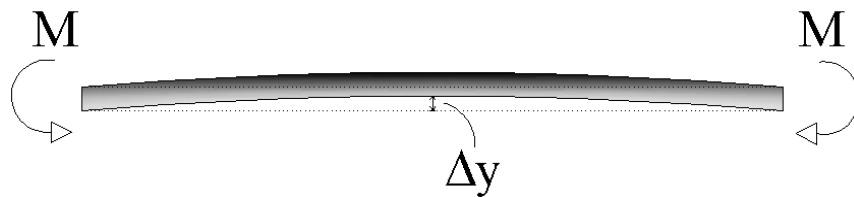
O exemplo abaixo ilustra de forma grosseira como o Momento Fletor atua em uma barra qualquer. As linhas pontilhadas representam as dimensões da barra antes do esforço:

(M = momento fletor e Δy = deformação da barra devido à ação do momento fletor)



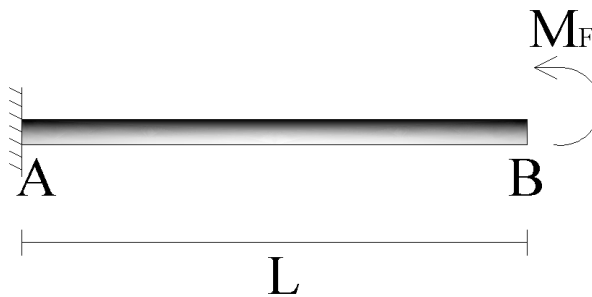
Fibras inferiores estão sendo tracionadas e as superiores comprimidas.

ou



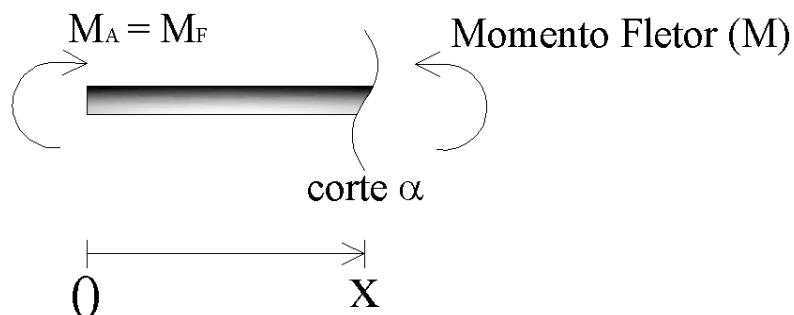
Fibras inferiores estão sendo comprimidas e as superiores tracionadas.

Em posse da idéia de Momento Fletor, pode-se agora, analisar a ação do mesmo em um exemplo de aplicação. Imagina-se, então, uma viga de comprimento L engastada e sendo solicitada por uma força de intensidade M_F :



Reação no vínculo: $\sum M = 0 \Rightarrow M_A - M_F = 0 \Rightarrow \underline{M_A = M_F}$

Fazendo um corte α qualquer na barra a x unidades de comprimento, tem-se:



Somando momentos em relação ao corte α , obtém-se o valor do esforço interno, neste caso, o Momento Fletor:

$$\sum M_{\alpha} = 0 \Rightarrow -M + M_F = 0 \Rightarrow \underline{M = M_F}$$

1.2 – Convenções de sinais para “N”, “Q” e “M”

A convenção dos sinais é um conceito de extrema importância para o estudo dos esforços solicitantes, pois é a partir da referência destes dados que se inicia todo o processo de cálculo. Deve-se ter muita atenção quanto a estas convenções.

Para facilitar os cálculos, recomenda-se adotar as seguintes convenções:

- *Esforço Normal*: É positivo quando de tração (distendendo a barra) ou negativo quando de compressão (comprimindo a barra). Lembrar de Treliças.
- *Esforço Cortante*: É positivo quando as projeções se orientam nos sentidos dos eixos (sentido horário), ou negativo, caso contrário.
- *Momento Fletor*: É positivo se tracionar as fibras inferiores da barra ou negativo, caso contrário.

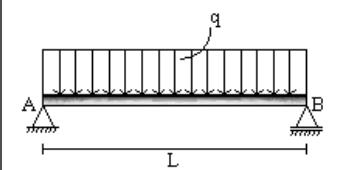
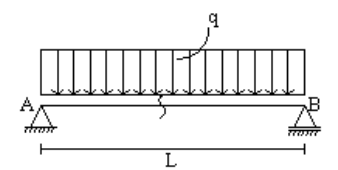
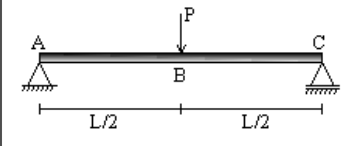
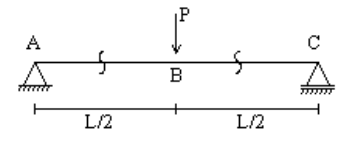
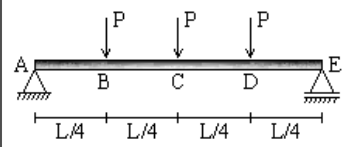
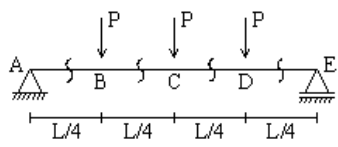
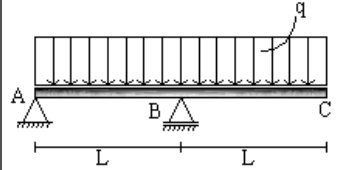
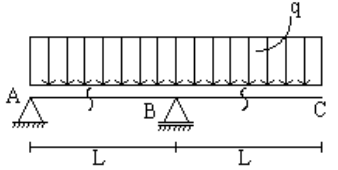
1.3 - Cálculo das Solicitações Internas

Para se efetuar o Cálculo das Solicitações Internas, torna-se conveniente utilizar o Método das Seções, este, por sua vez, consiste em:

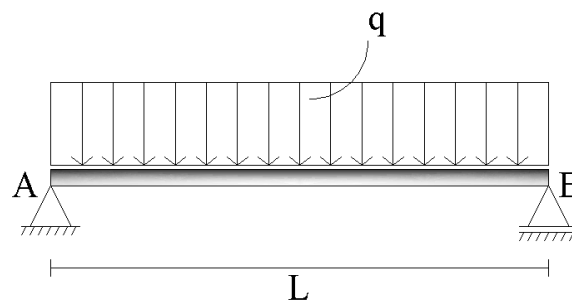
1º Passo

Cortar a peça na seção desejada e isolar um dos lados do corte (qualquer um), com todos os esforços externos atuando. Dependendo do tipo de carregamento, uma barra pode necessitar de mais de um corte para se efetuarem os cálculos. Em suma, um

novo corte deve ser feito para cada mudança abrupta de carregamento. Eis alguns exemplos:

EXEMPLOS DE CORTE SEM VIGAS COM DIFERENTES CARREGAMENTOS	
Tipo de solicitação sofrida pela viga	Onde devem ser feitos os cortes
	
	
	
	

Por hora, será analisada uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído:



Primeiramente, transforma-se o carregamento distribuído numa força pontual e calculam-se as reações nos vínculos:

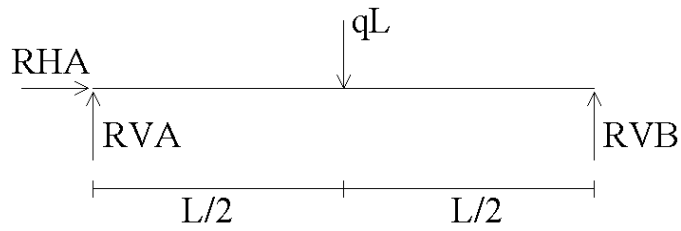


Diagrama de corpo livre

Cálculo das reações vinculares:

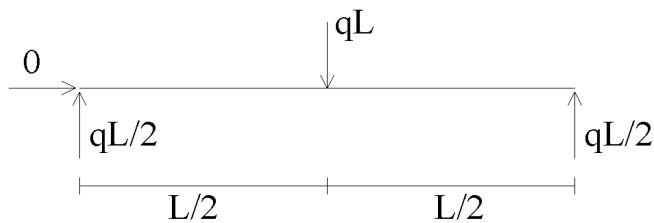
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} - qL = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} = qL$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow qL\left(\frac{L}{2}\right) - R_{VB}(L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VB} = \frac{qL}{2}}$$

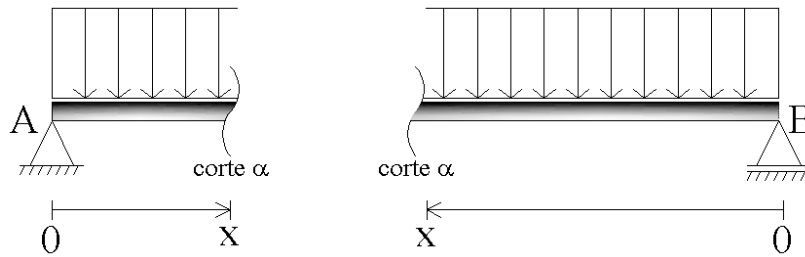
$$\therefore R_{VA} + R_{VB} = qL \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{qL}{2}}$$

Logo,



Em posse dos valores das reações nos vínculos, o próximo passo é escolher um ponto qualquer da viga pra se fazer um corte α .

Este modelo de carregamento admite apenas um corte para o cálculo das solicitações internas. Portanto, escolhe-se um ponto qualquer a x unidades de comprimento do ponto A ou do ponto B :

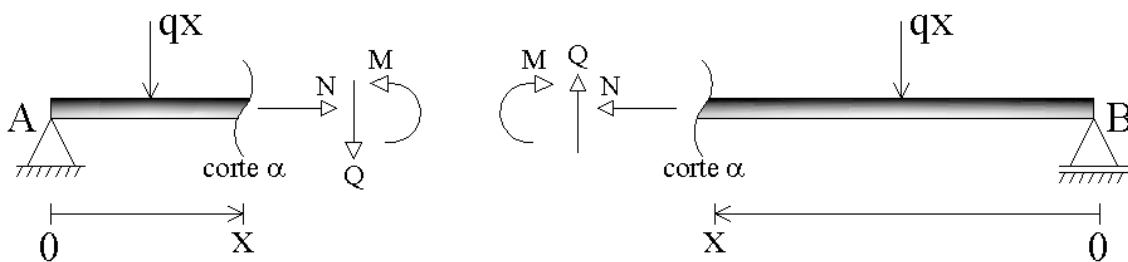


Independente do sentido escolhido para a análise (\overline{AB} ou \overline{BA}), deve-se sempre prestar muita atenção na convenção de sinais.

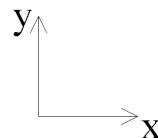
2º Passo

Na seção cortada devem ser desenvolvidas solicitações que mantêm o sistema isolado em equilíbrio (N , Q , M). Estas solicitações são os valores que devem ser determinados. (Não esquecer a convenção de sinais)

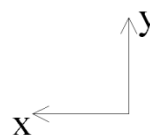
Após escolhido o ponto para o corte, torna-se conveniente transformar o carregamento q em uma força pontual. Como o corte foi feito a x unidades da periferia da barra, então, a carga pontual agora não será mais qL , mas sim, qx (lembrar que a área da figura referente ao carregamento, neste caso um quadrado, é igual ao carregamento, ou seja, $A = b.h = q.x$).



Se a análise for feita de A para B a convenção será:



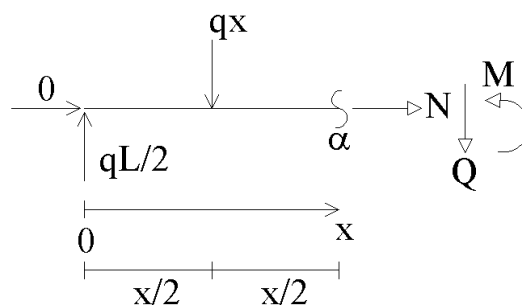
Caso a análise seja feita de B para A a convenção será:



3º Passo

Aplicando as equações de equilíbrio em relação à seção cortada, determinam-se os valores procurados. Vale observar que as solicitações a serem determinadas são 3 e são dispostas, também, 3 equações de equilíbrio, pode-se então formar um sistema de 3 equações com 3 incógnitas, ou seja, sistema Isostático, ou ainda, Sistema Possível Determinado (SPD).

De A para B:



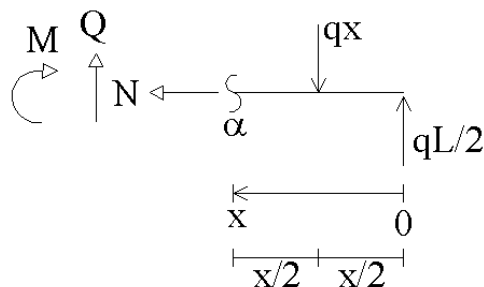
Somando forças em x e y , e momentos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -qx + \frac{qL}{2}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2}(x) - qx\left(\frac{x}{2}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}}$$

De B para A:



Somando forças em x e y , e momentos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} - qx + Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = qx - \frac{qL}{2}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2}(x) + qx\left(\frac{x}{2}\right) + M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}}$$

Observa-se neste caso que a cortante possui sinais diferentes dependendo do sentido escolhido para o corte, porém, isso não vai interferir em nada, pois ao seguir a convenção de sinais corretamente, os gráficos encontrados a partir das funções Normal, Cortante e Momento, para qualquer sentido do corte serão os mesmos.

Os gráficos dessas funções de Momento, Cortante e Normal são chamados de Diagramas dos Esforços Solicitantes.

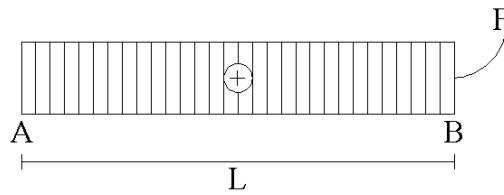
1.4 – Diagramas dos Esforços Solicitantes

Os Diagramas dos Esforços Solicitantes são gráficos traçados a partir das funções de Esforço Normal, Esforço Cortante e Momento Fletor, funções estas, encontradas no cálculo das solicitações internas. Os diagramas têm como objetivo mostrar como os esforços solicitantes se comportam durante toda a barra, ou seja, quantificar seus valores para qualquer trecho de toda seção, bem como, indicar pontos de esforços máximos e mínimos, ou até mesmo, nulos.

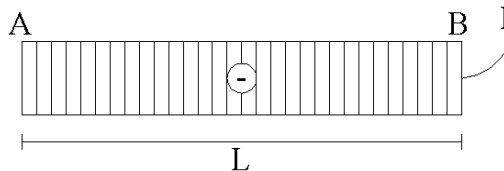
Os casos de esforço solicitante com valor *constante* independem de x , ou seja, para qualquer seção da barra o esforço será o mesmo. Matematicamente falando, seria o mesmo que dizer que $f(x) = cte$.

Os exemplos abaixo ilustram uma viga de comprimento L cujo esforço, no primeiro caso é positivo e no segundo caso é negativo. O esforço possui intensidade F :

1º Caso:



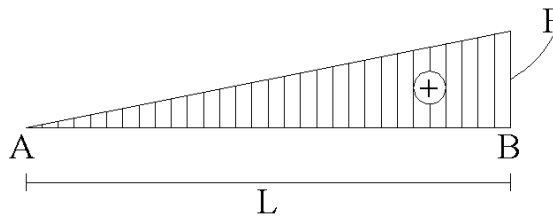
2º Caso:



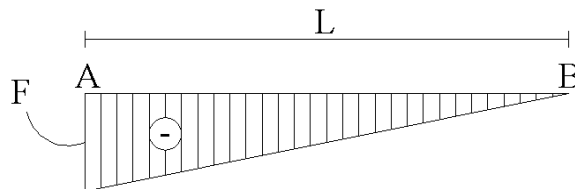
Quando o resultado das equações fornece uma *função do primeiro grau*, são necessários, pelo menos *dois valores* de x para definir a *reta*. Matematicamente falando, atribui-se um valor inicial e um valor final para x , ou seja, $f(x) = ax + b$.

Os exemplos abaixo ilustram uma viga de comprimento L cujo esforço, no primeiro caso é positivo e no segundo caso é negativo. O esforço máximo possui intensidade F :

1º Caso:



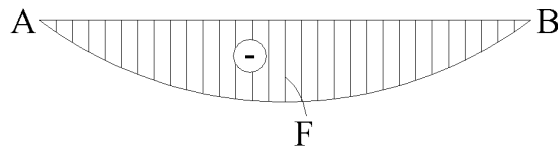
2º Caso:



Obs.: Nos dois casos, em determinados pontos da viga, os esforços são nulos. No 1º Caso isso ocorre no ponto A e no 2º Caso isso ocorre no ponto B .

Já para uma *função do segundo grau*, são necessários, pelo menos *três valores* de x para definir a *parábola*. Lembrar: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O exemplo abaixo ilustra uma viga de comprimento L , cujo esforço é negativo. O esforço máximo possui intensidade F . Nota-se que neste caso os pontos A e B possuem esforço igual à zero:



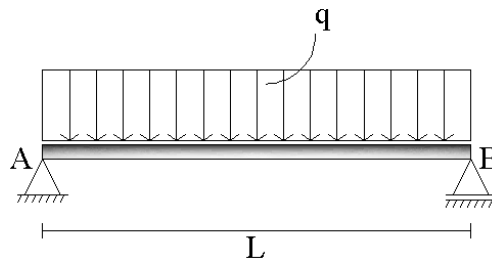
Em casos onde as funções sejam de grau três ou mais, a atribuição de valores para x torna-se um pouco mais trabalhosa, porém, segue-se a mesma metodologia que os exemplos anteriores para a construção dos diagramas.

Os sentidos dos esforços solicitantes podem ser orientados arbitrariamente, porém, é conveniente adotar sentidos positivos, pois, assim, os sinais obtidos nas equações dos esforços solicitantes serão os mesmos para os diagramas.

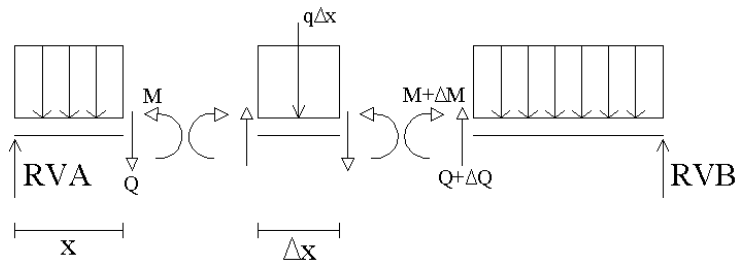
1.5 - Relações Diferenciais (q, Q, M)

Já foi visto que o equilíbrio de vigas pode ser imposto globalmente, o que resulta na determinação das reações de apoio, ou em porções isoladas, o que possibilita a determinação dos esforços internos. As condições de equilíbrio impostas em pequenas porções isoladas resultam em relações diferenciais de equilíbrio entre a taxa de carregamento transversal, o esforço cortante e o momento fletor.

Considerando a viga biapoiada mostrada abaixo, a qual, sofre ação de uma carga uniformemente distribuída de intensidade q :



Agora, analisa-se, em particular, um trecho de comprimento Δx da mesma viga:



O equilíbrio da pequena porção de comprimento Δx resulta em:

- Somatório das Forças em y:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +Q - q \cdot \Delta x - (Q + \Delta Q) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -q}}$$

- Somatório dos Momentos:

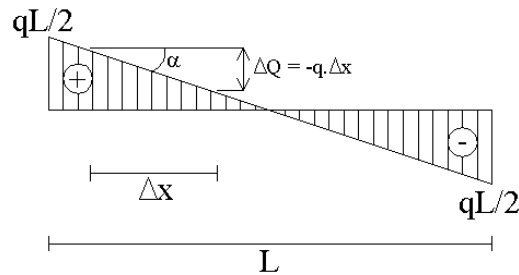
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow Q \cdot 0 - M - q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} + (M + \Delta M) - (Q + \Delta Q) \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta M = \left(Q + \Delta Q + \frac{q \cdot \Delta x}{2} \right) \Delta x \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q + \Delta Q + \frac{q \cdot \Delta x}{2}}}$$

Do somatório das forças em y se tem que $\Delta Q = -q \cdot \Delta x$. Logo,

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q - q \cdot \Delta x + \frac{q \cdot \Delta x}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2}}}$$

A relação $\Delta Q / \Delta x$ mostrada acima pode ser verificada no *diagrama de esforços cortantes* da viga:

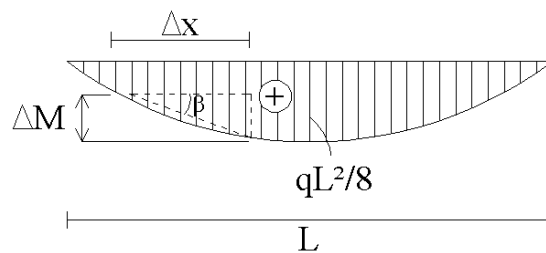


Nota-se que a inclinação da reta do diagrama, ou seja, o coeficiente angular do diagrama dos esforços cortantes é igual a $-q$:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -q \Rightarrow \tan \alpha = q$$

Isso indica que a taxa de variação do esforço cortante no trecho de comprimento Δx é igual a $-q$.

A relação $\Delta M / \Delta x$ mostrada acima, também pode ser verificada no *diagrama de momentos fletores* da viga:



A inclinação da reta que interpola os valores do diagrama de momentos fletores no trecho com comprimento Δx é igual à taxa de variação do momento fletor no trecho:

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2} = \tan \beta$$

Agora imaginando que o comprimento do trecho isolado Δx tenha um valor infinitesimal, isto é, imaginando o limite quando Δx tender a zero. Então, as taxas de

variação do esforço cortante e do momento fletor vão tender a valores pontuais das inclinações dos diagramas.

Representando matematicamente os limites das taxas de variação de esforço cortante e momento fletor quando o comprimento do trecho tende a zero, têm-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}$$

Onde $\frac{dQ}{dx}$ é chamada de *derivada do esforço cortante em relação à x* e $\frac{dM}{dx}$ é chamada de *derivada do momento fletor em relação à x*.

Lembrando sempre que: “A derivada de uma função qualquer representa a taxa de variação pontual da função.” Então, as expressões para as derivadas do esforço cortante e momento fletor são, respectivamente:

$$\frac{dQ}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -q = -q \rightarrow \frac{dQ}{dx} = -q \quad (\text{derivada do esforço cortante é igual a } -q)$$

$$\frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2} \right) = Q \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (\text{derivada do momento fletor é igual a } Q)$$

Estas expressões são chamadas *Relações Diferenciais de Equilíbrio de Vigas*.

Estas expressões são gerais, isto é, não são específicas para o caso da viga biapoiada com carga uniformemente distribuída. Isto porque, mesmo no caso de carga distribuída não constante, quando Δx tende à zero no limite, a taxa de carregamento distribuído no trecho de comprimento dx é constante e igual a $q(x)$, sendo $q(x)$ o valor da carga no ponto analisado.

Se forem combinadas as relações diferenciais do esforço cortante e do momento fletor, obtém-se a relação diferencial de segunda ordem entre o momento fletor e a taxa de carregamento distribuído:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = -q \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d^2M}{dx^2} = -q}}$$

(derivada segunda do momento fletor é igual a $-q$)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exemplo 1 – A viga biapoiada abaixo está sendo solicitada por uma carga uniformemente distribuída de intensidade q . Determinar os diagramas dos esforços solicitantes da viga.

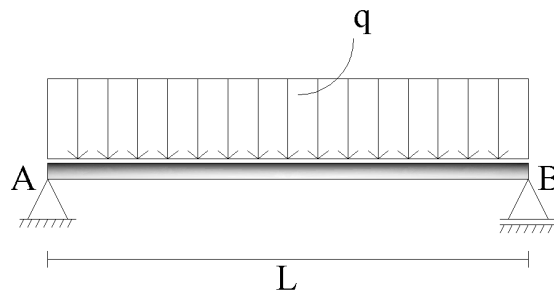
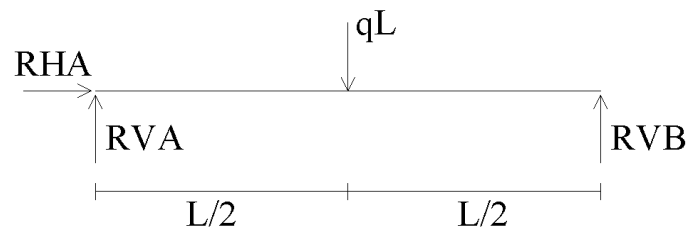


Diagrama do Corpo Livre:



Reações nos vínculos:

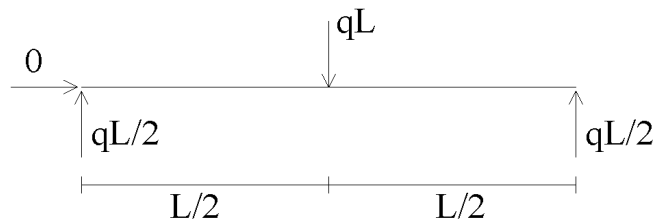
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} - qL = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} = qL$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow qL\left(\frac{L}{2}\right) - R_{VB}(L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VB} = \frac{qL}{2}}$$

$$\therefore R_{VA} + R_{VB} = qL \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{qL}{2}}$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:

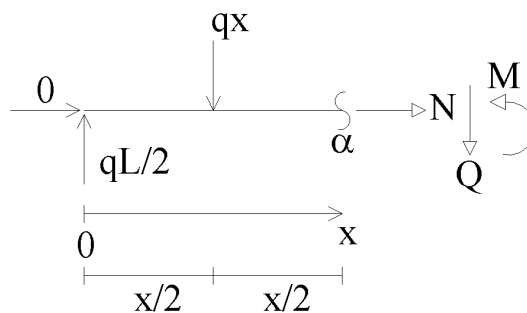


Esforços Solicitantes:

Como a viga está sob dois apoios, um fixo e um móvel, e sua solicitação é constante, a escolha de um corte apenas já é suficiente para a determinação das equações para os diagramas dos Esforços Solicitantes. Este corte pode ser tanto de A para B quanto de B para A. Abaixo serão analisadas estas duas formas de seccionar a viga, de modo que ao fim, os diagramas provem ser iguais, independente do sentido do corte.

a) Primeiramente o corte será feito de A para B, explicitando-se as reações internas de equilíbrio:

- Trecho \overline{AB} ($0 \leq x \leq L$):



Somando forças em x e y , e momentos:

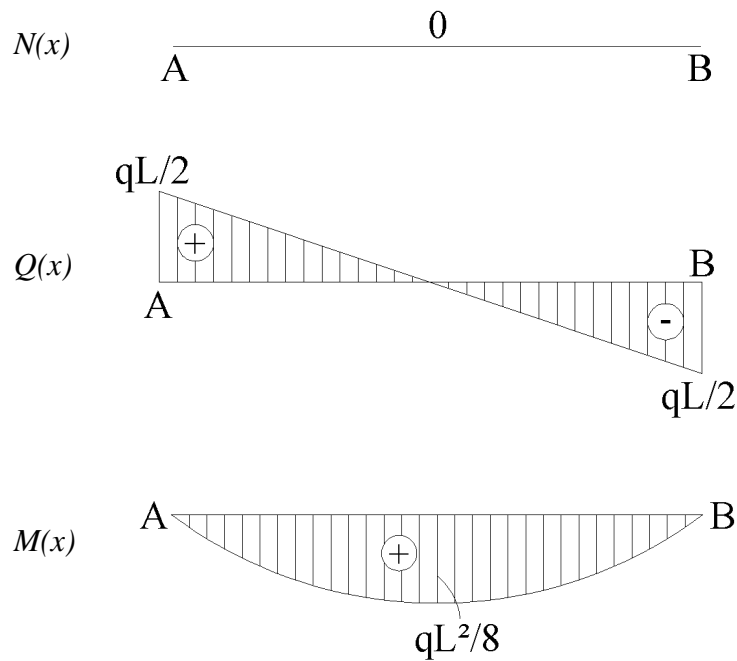
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -qx + \frac{qL}{2}}$$

$$\sum M_{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2}(x) - qx\left(\frac{x}{2}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}}$$

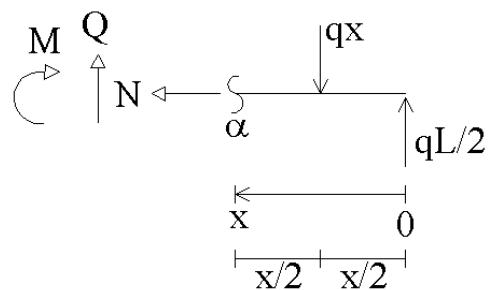
Diagramas dos Esforços Solicitantes:

Segundo a análise do trecho \overline{AB} os diagramas serão:



b) Agora, a análise será feita fazendo o corte de B para A:

- Trecho \overline{BA} ($0 \leq x \leq L$):



Somando forças em x e y , e momentos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} - qx + Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = qx - \frac{qL}{2}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2}(x) + qx\left(\frac{x}{2}\right) + M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x}$$

Pôde-se notar que a escolha do sentido dos cortes não interferiu nos valores das equações dos Esforços Solicitantes, portanto, está comprovado que, nesse caso, os diagramas serão os mesmos, independente do sentido do corte.

Exemplo 2 – A viga engastada abaixo está sofrendo um carregamento uniformemente distribuído em toda sua extensão de comprimento L . Sabendo-se que o valor da carga é q , pede-se: determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a viga a) Fazendo o corte de A para B e b) Fazendo o corte de B para A.

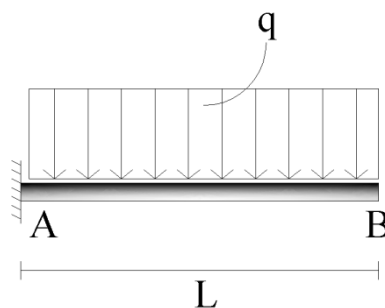
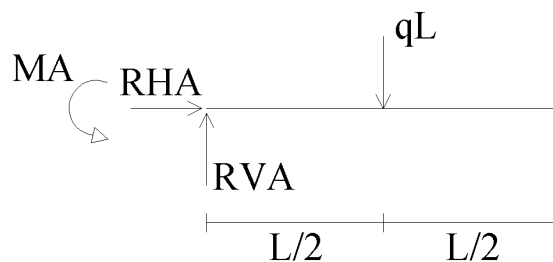


Diagrama de Corpo Livre:



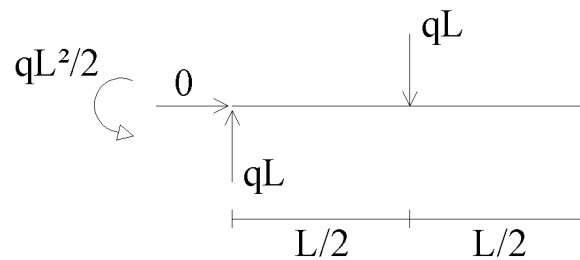
Reações nos vínculos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} - qL = 0 \Rightarrow \underline{R_{VA} = qL}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow qL\left(\frac{L}{2}\right) - M_A = 0 \Rightarrow \underline{M_A = \frac{qL^2}{2}}$$

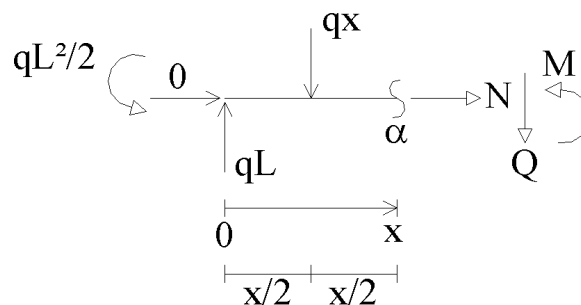
Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:



Esforços Solicitantes:

Nota-se que a viga não sofre alteração em seu carregamento durante sua extensão L , portanto, um corte apenas já é suficiente para que sejam encontradas às equações para os diagramas dos Esforços Solicitantes. No entanto, a questão pede que sejam analisados os dois modelos de corte que podem ser feitos neste modelo de viga.

a) - Trecho \overline{AB} ($0 \leq x \leq L$):



Somando forças em x e y , e momentos:

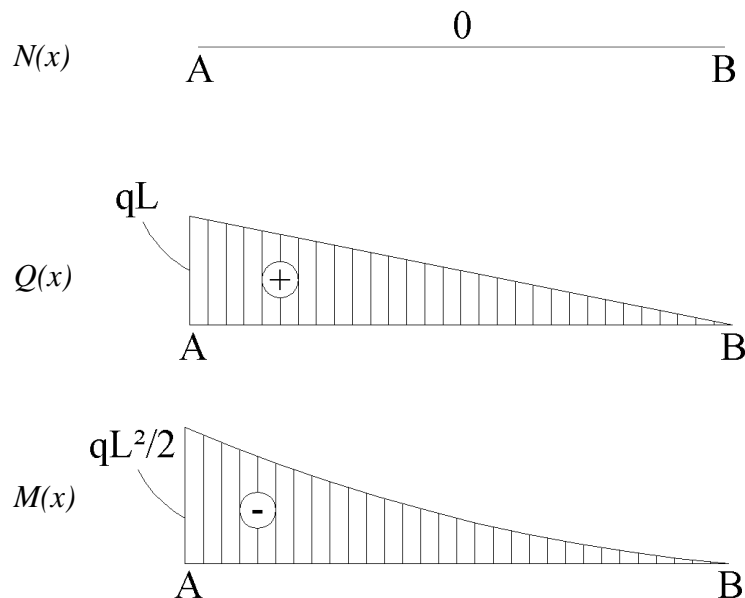
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N=0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow qL - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -qx + qL}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -\frac{qL^2}{2} + qL(x) - qx\left(\frac{x}{2}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2}}$$

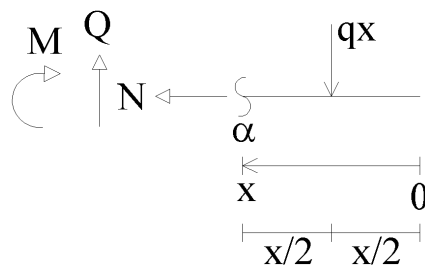
Diagramas dos Esforços Solicitantes:

Segundo a análise do trecho \overline{AB} os diagramas serão:



Agora, fazendo o corte de B para A:

b) - Trecho \overline{BA} ($0 \leq x \leq L$):



Quando o corte hipotético é feito de B para A acontece algo interessante. Como as reações vinculares estão concentradas no ponto A , não há necessidade de tais reações serem calculadas, pois o corte não chega até A . Logo, o cálculo vai resultar diretamente nas equações para os Diagramas dos Esforços Solicitantes.

Somando forças em x e y , e momentos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow qL - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = qx}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -\frac{qL^2}{2} + qL(x) - qx\left(\frac{x}{2}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2}}$$

Ao encontrar as equações para os Esforços Solicitantes de B para A , nota-se, ao atribuir valores para x , que os diagramas serão iguais aos traçados de A para B . Lembrando que o plano de referência do trecho \overline{BA} é diferente do trecho \overline{AB} , portanto, no momento de se fazer os diagramas, o plano de referência é de suma importância.

Exemplo 3 – A viga biapoiada abaixo está sendo solicitada por um carregamento triangular de intensidade q . Determinar os diagramas de esforços solicitantes da viga analisando, no entanto, dois cortes: de A para B e de B para A .

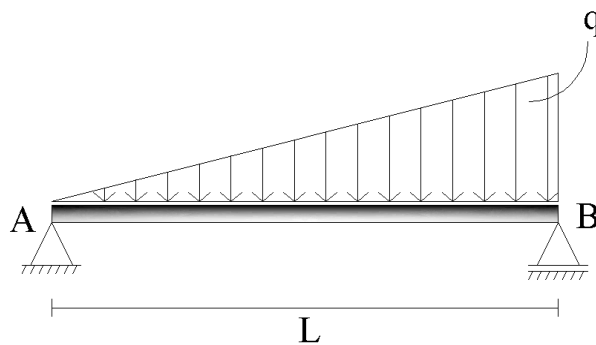
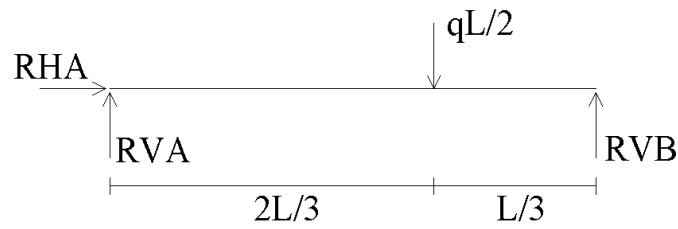


Diagrama de Corpo Livre:



Reações nos vínculos:

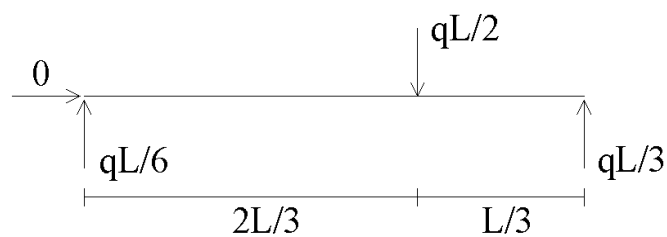
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} - \frac{qL}{2} = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} = \frac{qL}{2}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} \left(\frac{2L}{3} \right) - R_{VB}(L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VB} = \frac{qL}{3}}$$

$$\therefore R_{VA} + R_{VB} = \frac{qL}{2} \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{qL}{6}}$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:



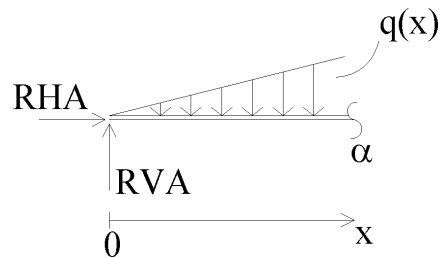
Esforços Solicitantes:

a) - Trecho \overline{AB} ($0 \leq x \leq L$):

Antes de ser feito o somatório de forças e momentos, um detalhe muito importante deve ser analisado. A força pontual encontrada quando foi efetuado o cálculo das reações nos vínculos é igual à $qL/2$. Entretanto, quando um corte hipotético

é feito na viga, um problema aparece: a carga, por ser de formato triangular, não permite saber qual seu valor máximo para um trecho de um corte qualquer. Portanto, algumas relações matemáticas deverão ser feitas para ser descoberto qual é o valor do carregamento no trecho analisado, bem como, sua carga pontual.

- Encontrando a carga máxima no trecho de zero a x :



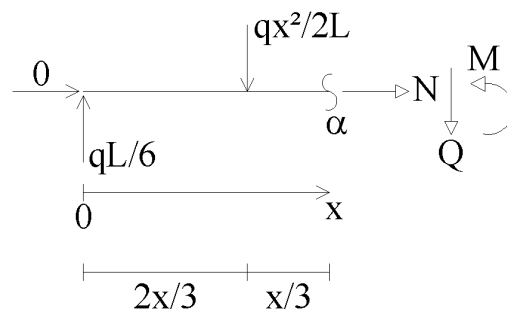
Chamando o carregamento no trecho em análise de $q(x)$ e partindo da semelhança de triângulos, tem-se que:

$$\frac{q}{L} = \frac{q(x)}{x} \Rightarrow q(x)L = qx \Rightarrow \underline{q(x) = \frac{qx}{L}}$$

A equação $q(x) = qx/L$ é igual ao valor da carga total que atua sobre o trecho de comprimento x . Porém, para o cálculo dos esforços solicitantes, faz-se necessário encontrar a carga pontual no mesmo trecho. Como no carregamento triangular a carga pontual é igual à área da figura, logo:

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2} = \frac{x.q(x)}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{qx}{L} = \underline{\underline{\frac{qx^2}{2L}}}$$

Enfim, aplicando os valores encontrados, têm-se:



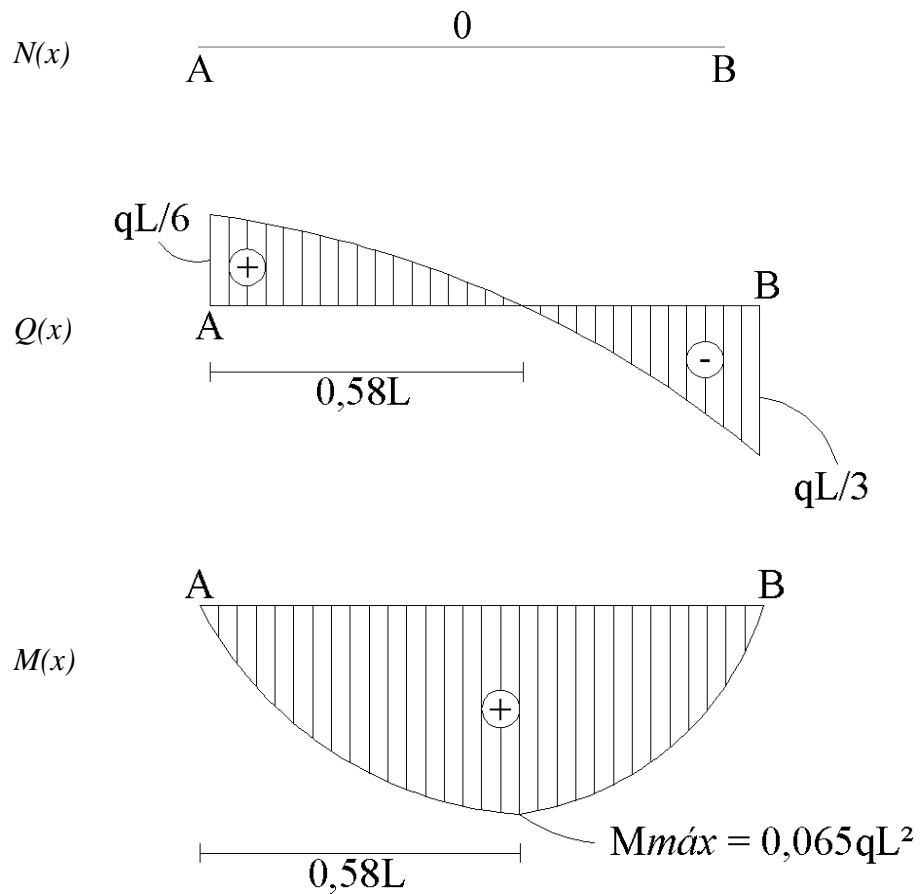
Somando forças em x e y , e momentos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{6} - \frac{qx^2}{2L} - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -\frac{qx^2}{2L} + \frac{qL}{6}}$$

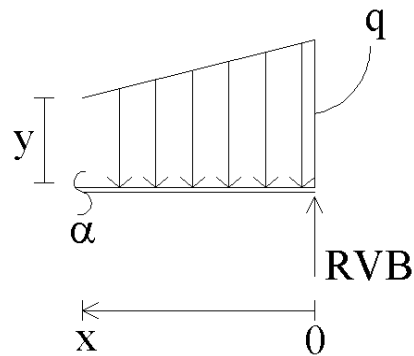
$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{qL}{6}(x) - \frac{qx^2}{2L}\left(\frac{x}{3}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^3}{6L} + \frac{qL}{6}x}$$

Diagramas dos Esforços Solicitantes:



b) - Trecho \overline{BA} ($0 \leq x \leq L$):

Os problemas de vigas com carregamento triangular podem ser resolvidos, também, efetuando-se um corte arbitrário no sentido \overline{BA} . Entretanto, quando este sentido de corte é escolhido, a análise a ser feita no carregamento de B para A difere da análise que foi feita no carregamento quando o sentido do corte foi de A para B .



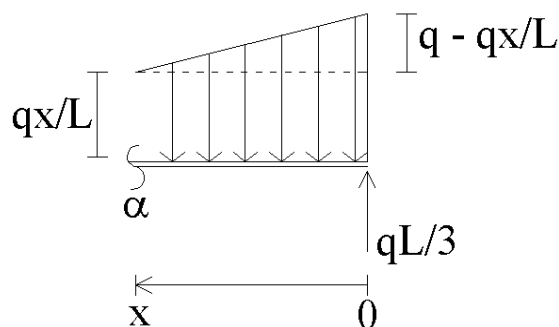
Pode-se notar que o carregamento acima é trapezoidal, porém, calcular o carregamento pontual para um carregamento deste modelo seria muito inconveniente. Entretanto, o trapézio pode ser dividido em um retângulo e um triângulo retângulo, os quais possuem carregamentos fáceis de calcular. Assim, partindo da superposição de efeitos entre os dois carregamentos, são obtidas as cargas pontuais.

Cálculos das Cargas Pontuais

Primeiramente, obtém-se o valor da carga y . Da relação trigonométrica, então:

$$\frac{q}{L} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{qx}{L}$$

De posse do valor da carga y , agora, divide-se o carregamento em duas partes, um triângulo e um retângulo:

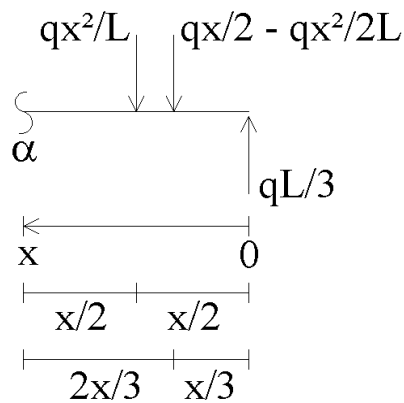


Através desta divisão são calculadas as áreas das figuras. Os valores destas áreas representarão as cargas pontuais respectivas para cada forma de carregamento, ou seja, uma carga pontual para o carregamento triangular e outra carga pontual para o carregamento retangular.

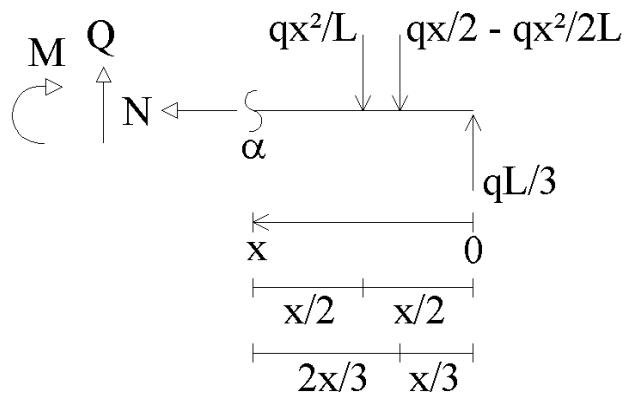
$$\text{Triângulo: } A_{\text{triângulo}} = \frac{b.h}{2} = \left(q - \frac{qx}{L} \right) \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{qx}{2} - \frac{qx^2}{2L}$$

$$\text{Retângulo: } A_{\text{retângulo}} = b.h = x \cdot \frac{qx}{L} = \frac{qx^2}{L}$$

Substituindo os carregamentos distribuídos por cargas pontuais, logo:



Finalmente os cálculos dos esforços solicitantes começam.



Somando forças em x e y , e momentos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q(x) - \frac{qx^2}{L} - \left(\frac{qx}{2} - \frac{qx^2}{2L} \right) + \frac{qL}{3} = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = \frac{qx^2}{2L} + \frac{qx}{2} - \frac{qL}{3}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow M(x) + \frac{qx^3}{6L} + \frac{qx^2}{3} - \frac{qLx}{3} = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^3}{6L} - \frac{qx^2}{3} + \frac{qLx}{3}}$$

Ao montar os gráficos, respeitando a devida convenção, chega-se à Diagramas iguais aos da letra “a”.

Exercício 4 – A viga biapoiada abaixo está sendo solicitada por uma força pontual de intensidade P situada a exatamente $L/2$ unidades de comprimento tanto do ponto A quanto do ponto C. Determinar os diagramas dos esforços solicitantes da viga.

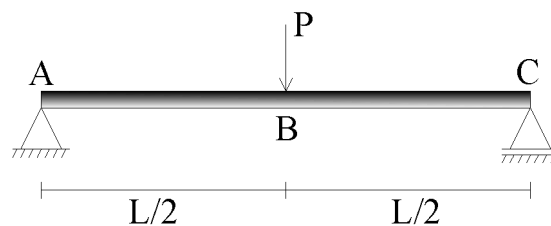
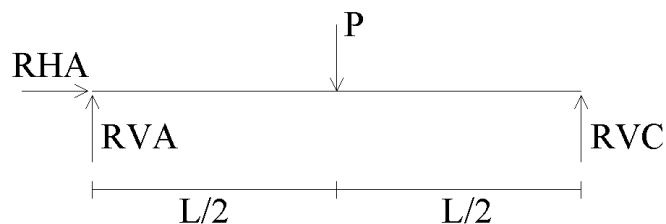


Diagrama de Corpo Livre:



Reações nos vínculos:

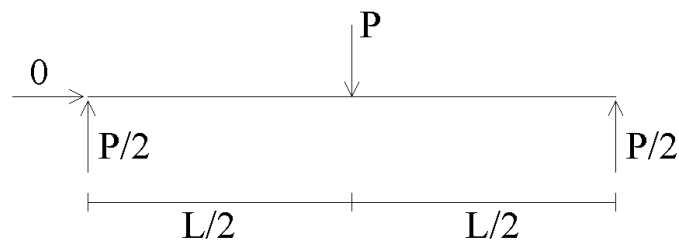
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} - P + R_{VC} = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VC} = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{PL}{2} - R_{VC}(L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VC} = \frac{P}{2}}$$

$$\therefore R_{VA} + R_{VC} = P \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{P}{2}}$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:



Esforços Solicitantes:

- Trecho \overline{AB} $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = \frac{P}{2}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}x - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = \frac{P}{2}x}$$

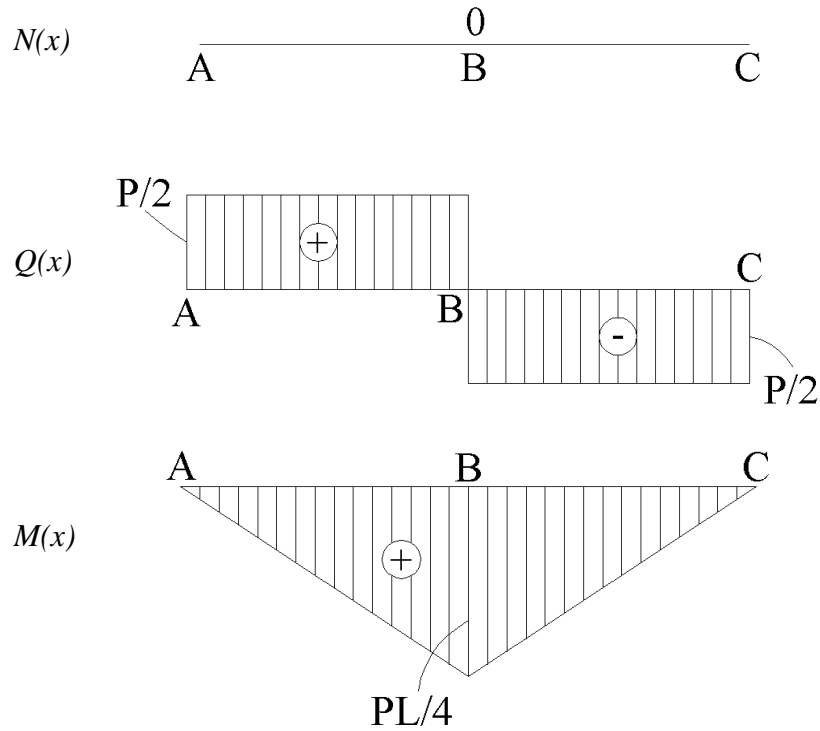
- Trecho \overline{BC} $(0 \leq x \leq L)$:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -\frac{P}{2}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -M(x) + \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{P}{2}x + \frac{P}{2}L}$$

Diagramas dos Esforços Solicitantes:



Exercício 5 - A viga biapoiada abaixo está sendo solicitada por três forças pontuais de mesma intensidade P . Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a viga.

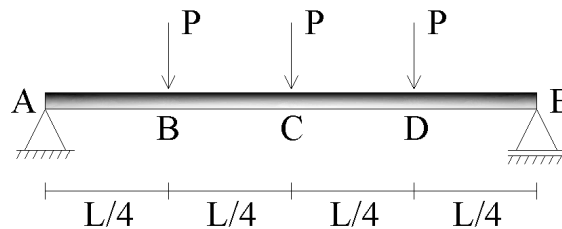
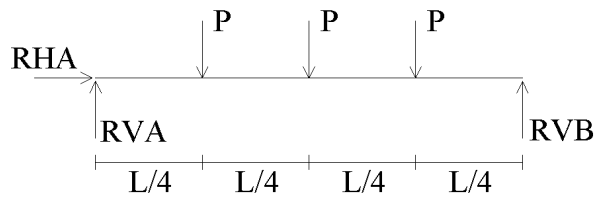


Diagrama de Corpo Livre:



Reações nos vínculos:

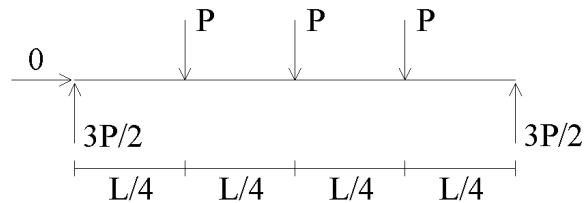
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} - P - P - P + R_{VE} = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VE} = 3P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{PL}{4} + \frac{PL}{2} + \frac{3PL}{4} - R_{VE}(L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VE} = \frac{3P}{2}}$$

$$\therefore R_{VA} + R_{VE} = 3P \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{3P}{2}}$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:



Esforços Solicitantes:

- Trecho \overline{AB} $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right)$:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = \frac{P}{2}}$$

$$\sum M_{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}x - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = \frac{P}{2}x}$$

- Trecho \overline{BC} $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right)$:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3P}{2} - P - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = \frac{P}{2}}$$

$$\sum M_{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{3P}{2}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = \frac{P}{2}x + \frac{P}{4}L}$$

- Trecho \overline{CD} $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right)$:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3P}{2} - 2P - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -\frac{P}{2}}$$

$$\sum M_{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{3P}{2}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) - P\left(x - \frac{L}{2}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{P}{2}x + \frac{3P}{4}L}$$

- Trecho \overline{DE} $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right)$:

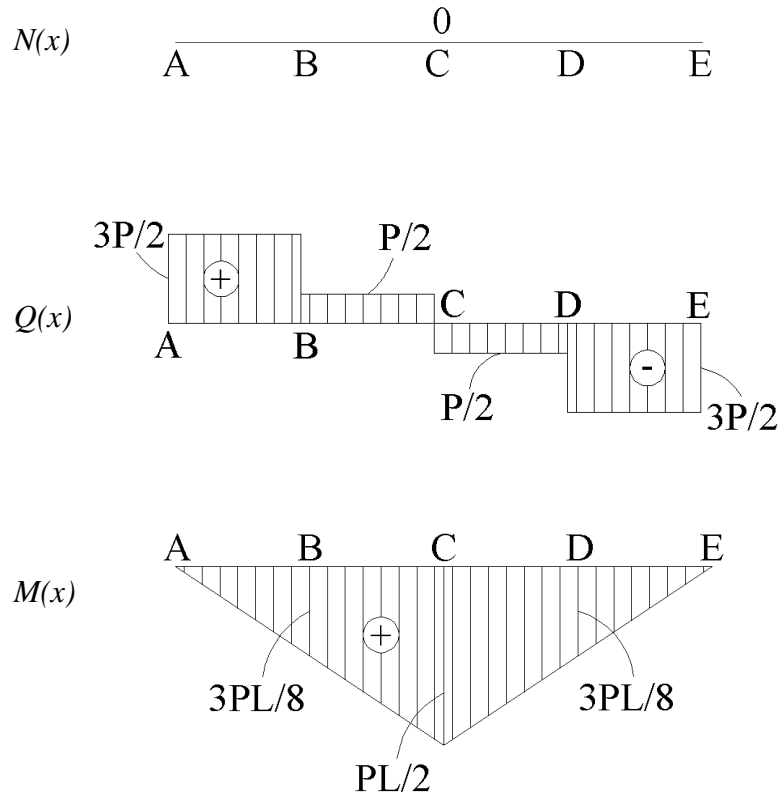
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3P}{2} - 3P - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -\frac{3P}{2}}$$

$$\sum M_{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{3P}{2}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) - P\left(x - \frac{L}{2}\right) - P\left(x - \frac{3L}{4}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{3}{2}Px + \frac{3}{2}PL}$$

Diagramas dos Esforços Solicitantes:



Exercício 6 – Sabendo-se que viga biapoiada abaixo possui um balanço no trecho BC, e que a mesma está sendo solicitada por um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q , pede-se: determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a viga.

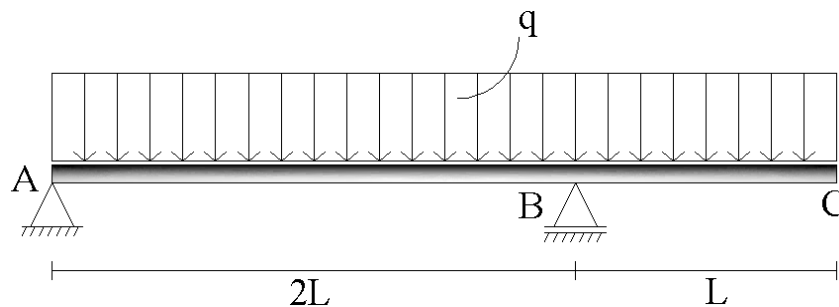
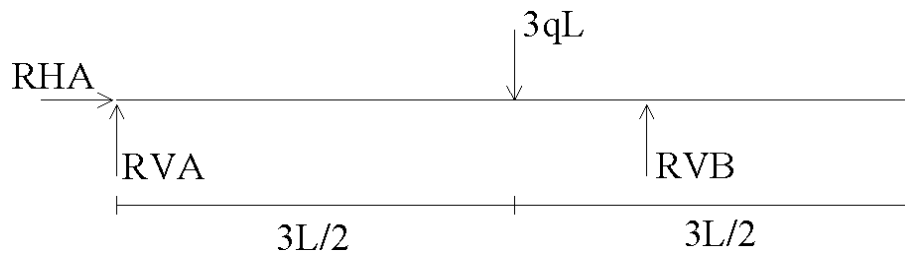


Diagrama de Corpo Livre:



Reações nos vínculos:

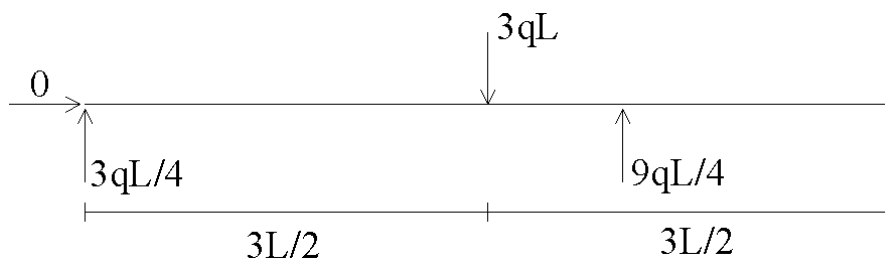
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} - 3qL = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} = 3qL$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3qL \left(\frac{3L}{2} \right) - R_{VB} (2L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VB} = \frac{9}{4} qL}$$

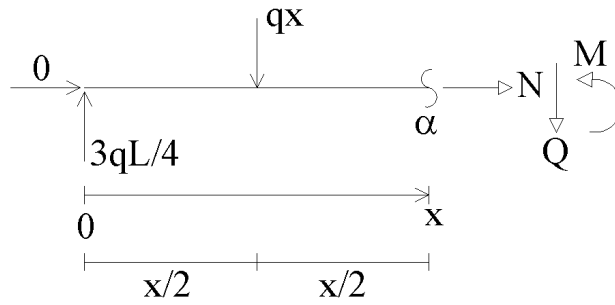
$$\therefore R_{VA} + R_{VB} = 3qL \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{3}{4} qL}$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:



Esforços Solicitantes:

- Trecho \overline{AB} ($0 \leq x \leq 2L$):

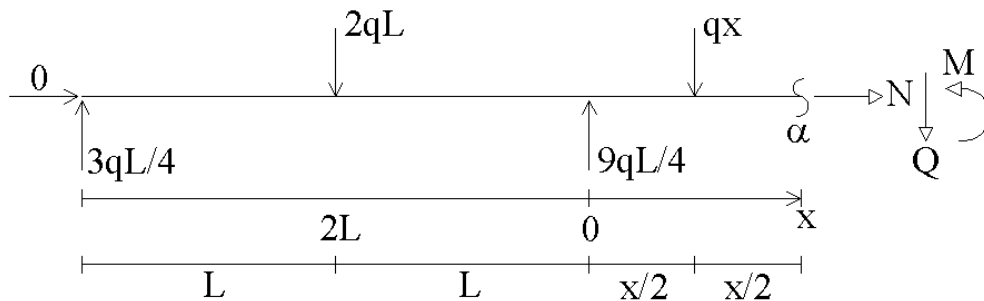


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}qL - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -qx + \frac{3}{4}qL}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -qx\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{4}qL(x) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{4}qLx}$$

- Trecho \overline{BC} ($0 \leq x \leq L$):



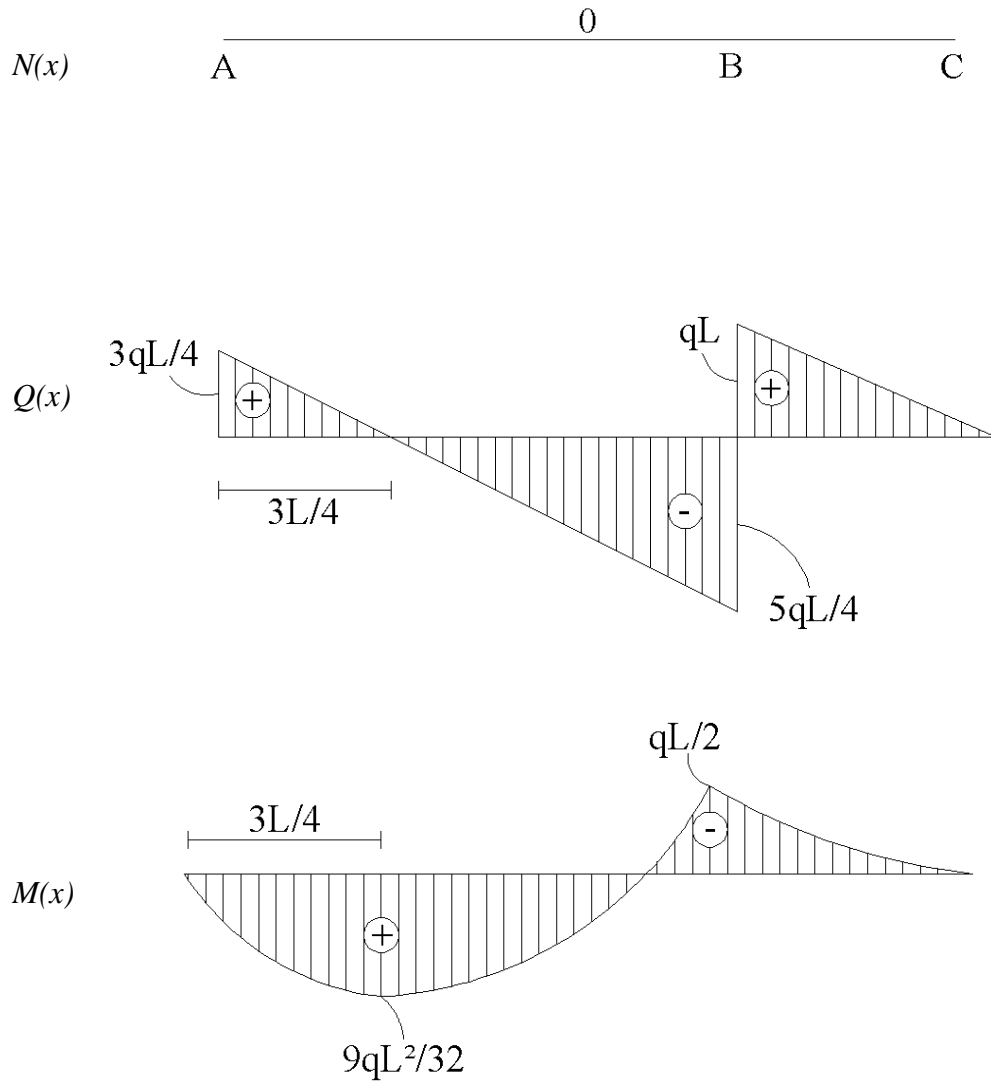
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}qL - 2qL + \frac{9}{4}qL - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -qx + qL}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -qx\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{9}{4}qL(x) - 2qL(L+x) + \frac{3}{4}qL(2L+x) - M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2}}$$

Diagramas dos Esforços Solicitantes:



Exercício 7 – A viga biapoiada abaixo está sendo solicitada por uma força horizontal de intensidade F e por um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q . Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a viga.

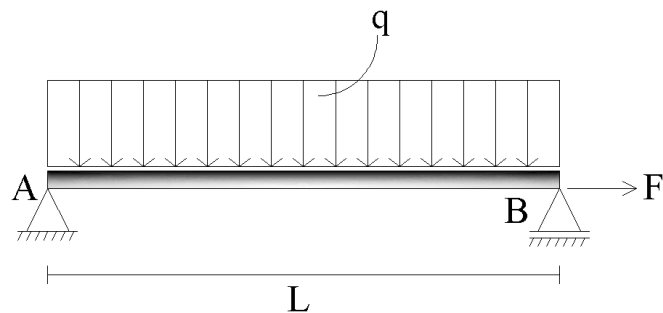
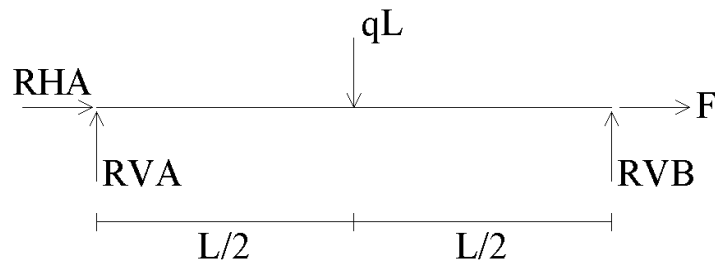


Diagrama de Corpo Livre:



Reações nos Vínculos:

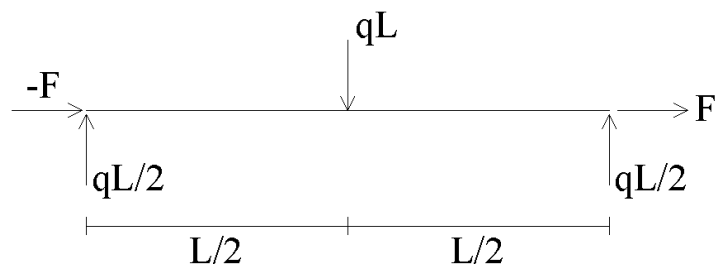
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{HA} + F = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = -F}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} - qL = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} = qL$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow qL\left(\frac{L}{2}\right) - R_{VB}(L) = 0 \Rightarrow \underline{R_{VB} = \frac{qL}{2}}$$

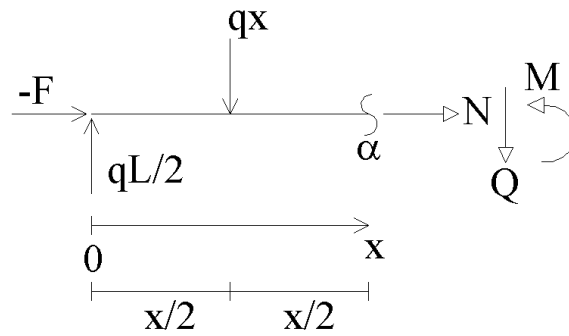
$$\therefore R_{VA} + R_{VB} = qL \Rightarrow \underline{R_{VA} = \frac{qL}{2}}$$

Substituindo as incógnitas pelos valores encontrados acima:



Esforços Solicitantes:

- Trecho \overline{AB} ($0 \leq x \leq L$):



Somando forças em x e y , e momentos:

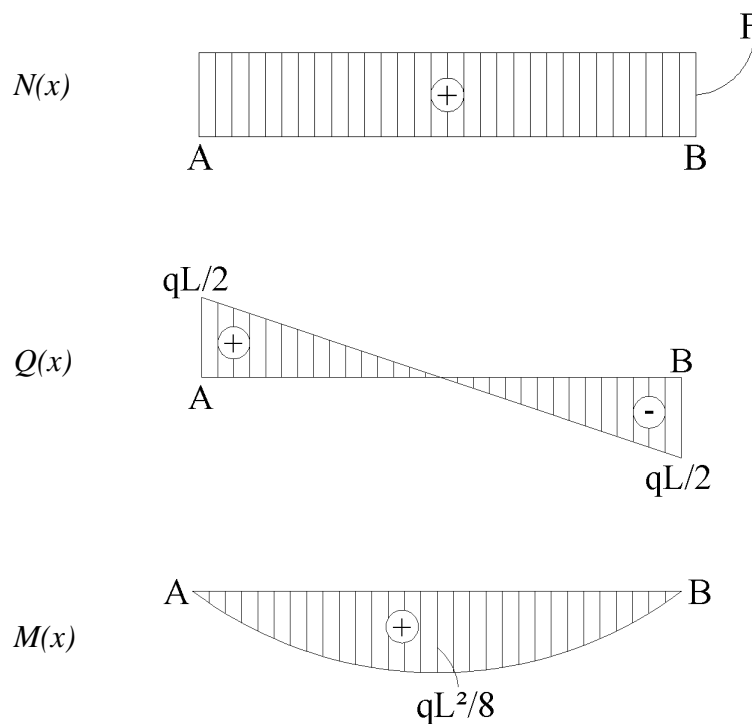
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - F = 0 \Rightarrow \underline{N = F}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} - qx - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -qx + \frac{qL}{2}}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2}(x) - qx\left(\frac{x}{2}\right) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x}$$

Diagramas dos Esforços Solicitantes:

Segundo a análise do trecho \overline{AB} os diagramas serão:



Exercício 8 – A viga Gerber abaixo possui um engastamento fixo em seu ponto A e um apoio móvel em seu ponto C . A mesma está sendo solicitada no trecho AB por um carregamento constante e uniformemente distribuído de intensidade q , e no ponto D a viga sofre a ação de uma carga pontual de intensidade P . A partir desses dados, pede-se determinar os diagramas de esforços solicitantes para a viga.

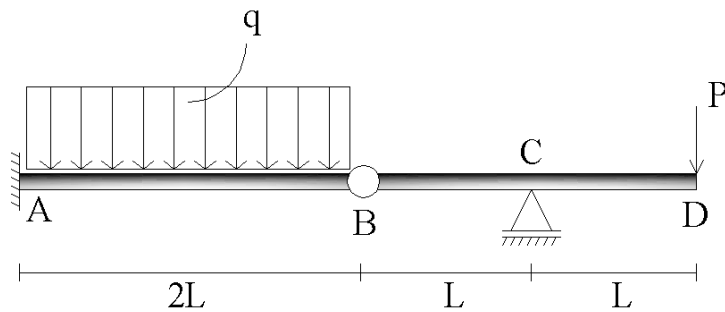
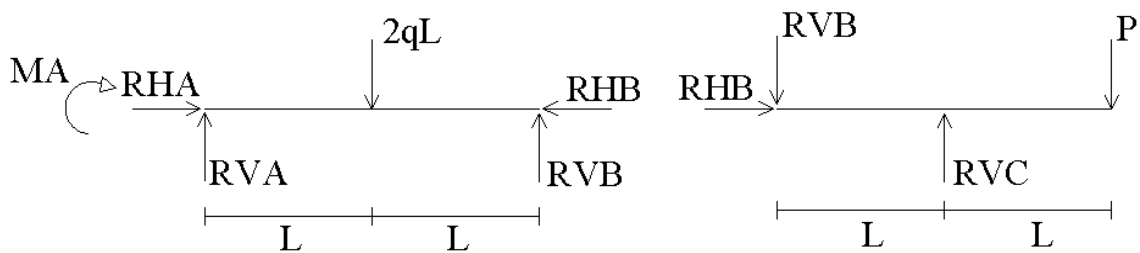
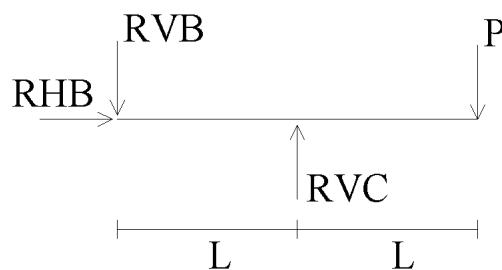


Diagrama de Corpo Livre:



Reações nos vínculos:

- Trecho \overline{BD} :



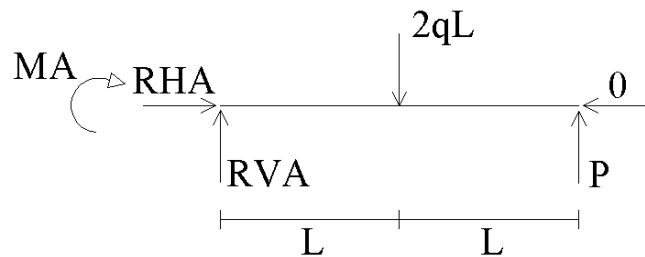
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HB} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_{VB} + R_{VC} - P = 0 \Rightarrow R_{VC} - R_{VB} = P$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -R_{VC}(L) + 2PL = 0 \Rightarrow \underline{R_{VC} = 2P}$$

$$\therefore R_{VC} - R_{VB} = P \Rightarrow \underline{R_{VB} = P}$$

- Trecho \overline{AB} :

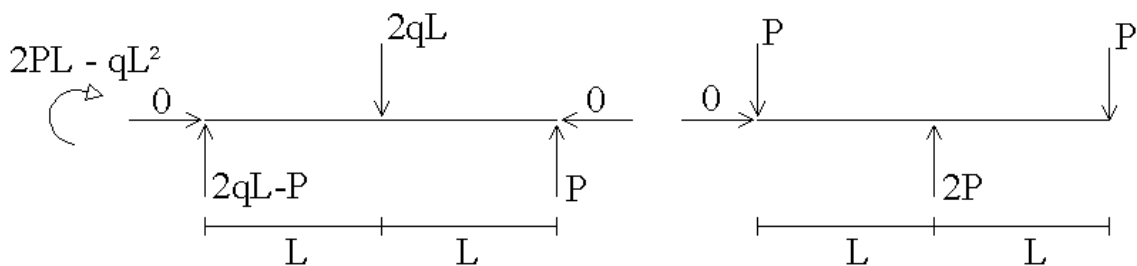


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_{HA} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} - 2qL + P = 0 \Rightarrow \underline{R_{VA} = 2qL - P}$$

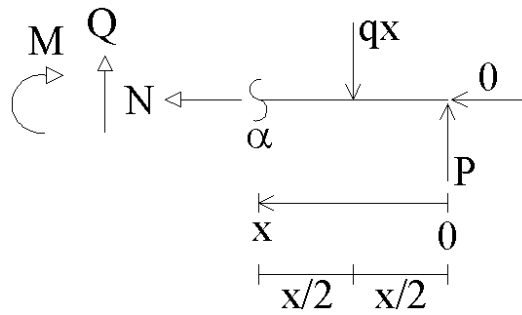
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + qL^2 - 2PL = 0 \Rightarrow \underline{M_A = 2PL - qL^2}$$

Substituindo os valores encontrados no lugar das incógnitas:



Esforços Solicitantes:

- Trecho \overline{BA} ($0 \leq x \leq 2L$):

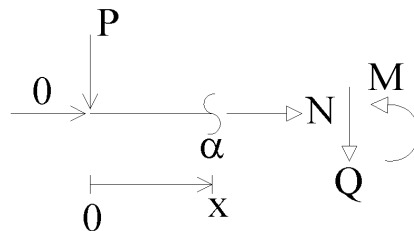


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q(x) - qx + P = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = qx - P}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow M(x) + qx\left(\frac{x}{2}\right) - Px = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -\frac{qx^2}{2} + Px}$$

- Trecho \overline{BC} ($0 \leq x \leq L$):

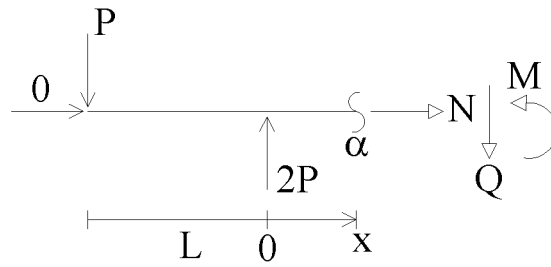


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = -P}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -P(x) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = -Px}$$

- Trecho \overline{CD} ($0 \leq x \leq L$):



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = 0 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + 2P - Q(x) = 0 \Rightarrow \underline{Q(x) = P}$$

$$\sum M_\alpha = 0 \Rightarrow -P(L+x) + 2P(x) - M(x) = 0 \Rightarrow \underline{M(x) = Px - PL}$$

Diagramas dos Esforços Solicitantes:

